Ссылка для цитирования этой статьи:

Копылова Е.С., Николаева Д.С., Бунтова Е.В. Решение задачи коммивояжёра с использованием метода ветвей и границ // Human progress. – 2018. - Том 4, № 4 [Электронный ресурс] URL: http://progress-human.com/images/2018/Tom4_4/Kopylova.pdf, свободный. – Загл. с экрана. - Яз. рус., англ.

УДК 51.7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Копылова Елизавета Сергеевна
студент
ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»

kopylowa.elizaveta@yandex.ru
ул. Советской Армии, д. 141
г. Самара, РФ, 443063
+7 (846) 933-88-86

Николаева Дарья Сергеевна
студент
ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»

ms.dnik25@gmail.com
ул. Советской Армии, д. 141
г. Самара, РФ, 443063
+7 (846) 933-88-86

Бунтова Елена Вячеславовна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов
ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»

lena-buntova1@yandex.ru
ул. Советской Армии, д. 141
г. Самара, РФ, 443063
+7 (846) 933-88-86

Аннотация. В статье рассматривается возможность снижения логистических затрат на транспортировку продукции посредством поиска наиболее выгодного пути перемещения. Поскольку необходим возврат курьера в точку отправления, это обуславливает необходимость решения задачи коммивояжера (посредника). Различные части алгоритма были рассмотрены и усовершенствованы рядом исследователей. Однако полный современный вариант решения задачи представлен ранее не был. С учетом данного обстоятельства в статье приведено усовершенствованное авторами алгоритмическое отображение метода и его применение. Описан пошаговый алгоритм для проблемы командирующего коммивояжера с использованием метода ветвей и границ. Алгоритм включает шесть этапов: составление таблицы, редукция (уменьшение) таблицы, расчет нижней границы, ветвление, вычисление оценок, построение дерева ветвления. Далее по описанному алгоритму проведен расчет возможных путей доставки продукции компании курьером по фактическим адресам в десяти городах России. Определены оптимальный маршрут и максимальная его продолжительность, при этом значительно сокращаются затраты на логистику. Полученные в ходе расчетов авторами результаты показали, что с помощью метода ветвей и границ поиск решений осуществляется качественно и эффективно, при этом сам метод не является трудоемким.

Ключевые слова: проблема коммивояжера; теории графов; метод ветвей и границ; путь Гамильтона; цикл Гамильтона.

JEL коды: C 02; C 65.

Введение

В жизни современных предприятий самого разного рода существенное место занимают транспортные потоки. Для осуществления своевременной доставки товара потребителям в кратчайшие сроки руководство компании занимается решением задачи кольцевого маршрута, иначе задачи коммивояжера.

Эта задача является упрощенной моделью для многих других задач дискретной оптимизации. В области оптимизации дискретных задач задача коммивояжёра служит катализатором, стимулирующим разработку наиболее эффективных методов, алгоритмов и способов их машинной реализации.

Целый ряд практических задач в области логистики сводится к классической задаче коммивояжера. Обилие эвристических методов её решения не означает отказа от возможности получения точных решений этой задачи. Классический алгоритм, реализующий метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра, предложенный в 1963 году Дж. Литтлом [1], К. Мурти [2], Д. Суини [3] и К. Кэролом [4] и в настоящее время остаётся востребованным алгоритмом точного решения задачи нахождения гамильтонового цикла минимальной стоимости в полном взвешенном графе. Несмотря на достаточно детальное описание алгоритма в различных источниках [5; 6], некоторым моментам не уделяется должного внимания.

Формулировка задачи следующая: курьер должен выйти из определенной точки, пройти через несколько городов и вернуться к отправной точке своего путешествия [7], что делает возможным нахождение кратчайшего пути, который в свою очередь обеспечит наибольший поток информации, наибольшую полезность и т.д.

По своей природе задача коммивояжёра относится к категории NP-полных проблем, т.е. не имеет алгоритма, который обеспечил бы решение проблемы в терминах полиномиального времени.

Цель исследования – применить алгоритм современного метода ветвей и границ при расчете возможных путей доставки продукции компании Coca-Cola курьером по фактическим адресам России.

Применение метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра

Применение математических методов в решении проблемы коммивояжера предполагает использование теории графов.

Определение 1.1. Граф, или ориентированный граф G — это упорядоченная пара $G \coloneqq (V, R)$, где V — это непустое множество вершин или узлов, а R — множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами.

Определение 1.2. Гамильтонов цикл в графе GG - это путь (цикл), который содержит все вершины графа. Граф называется графом Гамильтона в том случае, если он содержит цикл Гамильтона.

Определение 1.3. Гамильтонов путь – простой путь (путь без петель), проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов путь отличается от цикла тем, что у пути начальные и конечные точки могут не совпадать, в отличие от цикла.

Определение 1.4. Взвешенным графом называют такой граф, в котором каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число d_{ij}, называемое весом ребра [8].

Согласно вышеприведенным определениям делается вывод, что решение проблемы коммивояжёра эквивалентно поиску цикла Гамильтона с наименьшим весом в матрице.

Таким образом, задача коммивояжёра рассматривается в виде задачи бинарного линейного программирования.

Целевая функция имеет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \to min, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1; j = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; i = 1, \dots, m, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \, \{i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\}. \qquad (4)$$

где d_{ij} - расстояние между городами *i* и *j, а* x_{ij} обозначает двоичные переменные.

Двоичные переменные обозначаются следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжёр переправляется из города i в город j,} \\ 0, & \text{если коммивояжёр не переправляется из города } i \text{ в город } j. \end{cases}$$

Поскольку переменные x_{ij} могут принимать только значение 0 или 1, эта проблема имеет конечное число решений.

Математическая формулировка задачи: найти переменные $\{i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\}$, удовлетворяющие системе ограничений (2), (3), условиям неотрицательности (4) и обеспечивающие минимум целевой функции (1).

Метод ветвей и границ основан на идее о том, что множества делятся на два непересекающихся подмножества на каждом шаге процесса - ветвления. Кроме того, одно подмножество содержит путь между двумя выбранными городами, а другое подмножество - нет. Для каждого из этих подмножеств нижнее ограничение рассчитывается по продолжительности или по командировочным расходам. Наконец, исключается подмножество, которое превышает оценочную нижнюю границу.

Процедура ветвления представлена деревом, где вершина отмечена точками ветвления множества решений, а ребра отмечают путь между двумя смежными вершинами графа, которые используются для моделирования проблемы, и внутри которой кратчайший цикл Гамильтона [9].

Шаги алгоритма для проблемы командирующего коммивояжера с использованием метода ветвей и границ следующие:

Шаг 1: Составление таблицы.

Представлена таблица расстояния между заданными вершинами. Расстояние между вершинами *i* и *j* отмечено d_{ij}. Если две вершины не смежны, они отмечены значком $d_{ii} = \infty d_{ii} = \infty$. Также $d_{ii} = \infty d_{ii} = \infty$ знак вводится для обозначения и предотвращения выбора пути *i*→*ii*→*i*, который уже был использован.

Шаг 2: Редукция (уменьшение) таблицы.

Из каждой строки вычитается её наименьший элемент, что в результате приводит к образованию в каждой строке одного или более нулей. Затем из каждого столбца вычитается его наименьший элемент. Это преобразование основано на том факте, что при вычитании константы из любого столбца или строки в матрице стоимость оптимального маршрута уменьшается на величину этой константы, а маршрут остается тем же. Сумма всех вычтенных при этом величин и будет оценкой снизу для всех вариантов маршрута, построенных по данной матрице.

В каждой строке таблицы располагается самый маленький элемент, который помечен как d_i:

$$d_i = min_j d_{ij}, j = 1, \dots, n.$$

Наименьшие элементы в столбцах рассчитываются формулой:

$$c_j = min_i\left(d_{ij} - d_i\right)c_j = \min(d_{ij} - d_i) .$$

Редукция таблицы проводится в соответствии с формулой:

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_i - c_j.$$

Шаг 3: Расчет нижней границы.

Вычисление нижней границы продолжительности путешествия имеет вид:

$$b=\sum d_i + \sum c_j.$$

Шаг 4: Ветвление.

Далее производится выбор некоторого ребра графа, при котором все возможные варианты маршрута делятся на две группы: те, которые включают выбранное ребро, и те, в которых оно отсутствует. Для обеих групп создается отдельная матрица расстояний. Эти матрицы подвергаются аналогичному преобразованию с выбором ребра. Строящееся при этом дерево решений получается двоичным [10].

Выбор ребра на каждом шаге производится таким образом, чтобы оптимальный вариант маршрута содержал выбранное ребро с наибольшей вероятностью. С этой целью просматриваются строки матрицы и среди них выделяется та, в которой второе минимальное ребро имеет наибольший вес. Затем в той же последовательности просматриваются столбцы. Окончательно выбирается такое ребро с нулевым весом, для которого вес второго минимального ребра в строке или столбце максимальный. Выбранное ребро включается в маршрут для вариантов маршрута первой группы и исключается из всех вариантов маршрута второй группы. В результате оценка снизу для всех вариантов маршрута второй группы увеличивается на вес второго минимального ребра в строке или столбце.

Шаг 5: Вычисление оценок.

Вычисляется оценка узла, смежного с краем, который имеет вес (i, j). В таблице расчетов $d_{ij} = \infty d_{ij} = \infty$ вводится обозначение ограничения для коммивояжёра, которые не позволяют ему вернуться из города *i* в город *j*. Кроме того, все возможности закрытия цикла перед прохождением всех вершин графа должны быть заблокированы. Следующий шаг - удалить столбец *i* и *j* из этой таблицы и повторить шаги 2 и 3.

Шаг 6: Чертится дерево ветвления. В ветвящемся дереве назначается b этикет узлу, с которого началось ветвление. Края, выходящие из этого узла, присваиваются «весами» (i, j) и $non(i, j)$.

Алгоритм завершается, когда в таблице остаются только те маршруты, которые, если не используются, приводят к решению, являющемуся траекторией бесконечной продолжительности.

Авторы применили рассмотренный алгоритм для решения задачи расчета путей доставки продукции компании Coca-Cola курьером по фактическим адресам России. На вход алгоритма подавалась квадратная матрица расстояний размером $n * n$, где все $d_{ij} > 0$, причём диагональные элементы $d_{ii} = \infty$.

Метод ветвей и границ использовался авторами для оптимизации доставки продукции по следующим городам: Самара (1), Истра (Московская область) (2), Щёлково Мултон (Московская область) (3), Санкт-Петербург (4), Красноярск (5), Ростов-на-Дону (6), Владивосток (7), Новосибирск (8), Москва (9), Екатеринбург (10).

Расстояние между ними в километрах представлено в таблице 1.

Табл. 1: Расстояние между городами доставки продукции[1]

ij	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	∞	1103	1078	1764	3217	1324	8108	2451	1086	956
2	1103	∞	68	708	4196	1101	9077	3430	38	1821
3	1078	68	∞	719	4127	1103	9018	3361	74	1775
4	1764	708	719	∞	4606	1783	9497	3840	715	2231
5	3217	4196	4127	4606	∞	4509	4906	802	4180	2409
6	1324	1101	1103	1783	4509	∞	9395	3743	1081	2243
7	8108	9077	9018	9497	4906	9395	∞	5694	9072	7301
8	2451	3430	3361	3840	802	3743	5694	∞	3414	1644
9	1086	38	74	715	4180	1081	9072	3414	∞	1827
10	956	1821	1775	2231	2409	2243	7301	1644	1827	∞

[1] Составлено авторами по данным справочника расстояний между городами

В начале был взят в качестве произвольного следующий маршрут:

$X_0 = (1,2); (2,3); (3,4); (4,5); (5,6); (7,8); (8,9); (9,10); (10,1)$.

Согласно алгоритму расчета, были найдены минимальные элементы. После операции вычитания минимальных элементов получается полностью редуцированная матрица, в которой величины d_i и d_j называются константами приведения.

Длина маршрута определяется выражением:

$$F = \sum d_{ij}.$$

Следующим действием определялось ребро ветвления и все множества маршрутов относительно этого ребра разбивались на два подмножества (i, j) и $(i *, j *)$, и определялась сумма образовавшихся констант приведения, далее они приводятся в скобках.

После исключения ребра осуществлялось очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества, в результате образовывалась редуцированная матрица.

После нахождения нижней границы гамильтоновых циклов для каждого подмножества происходит включение ребра для исключения образования негамильтонова цикла.

По итогу была получена сокращенная матрица, которая подлежит операции приведения. При этом оценка снизу оказалась меньше стоимости ранее найденного наилучшего маршрута.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид, приведенный в таблице 2.

Табл. 2: Сокращенная матрица[2]

ij	**2**	**6**	**d_i**
3	0	0	0
9	∞	0	0
d_j	0	0	0

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0.$$

В соответствии с этой матрицей включаются в гамильтонов маршрут ребра (3,2) и (9,6).

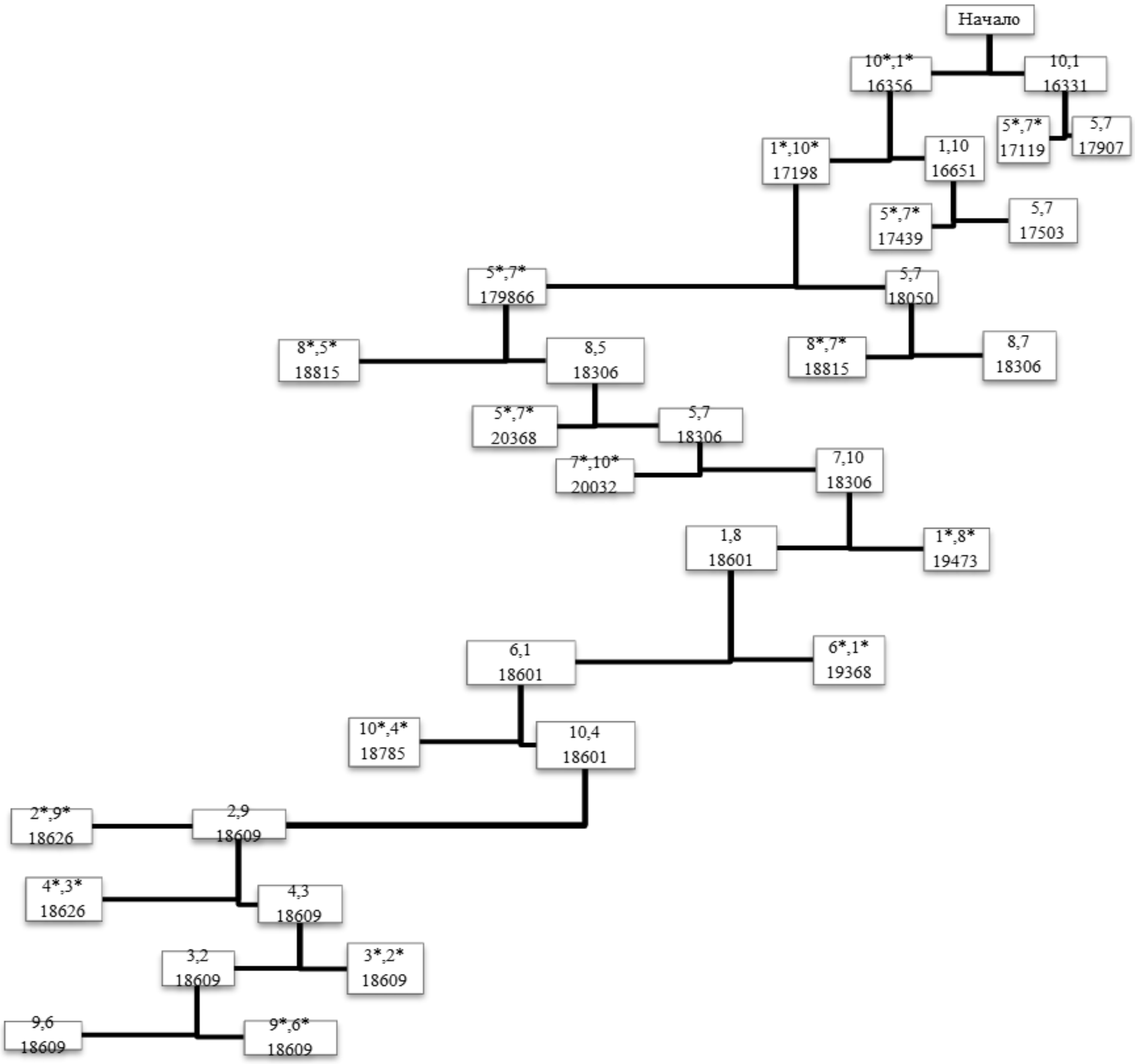
В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра: (8,5), (5,7), (7,10), (10,4), (4,3), (3,2), (2,9), (9,6), (6,1), (1,8).

Длина маршрута равна $F = 20921$ км.

Полное дерево ветвления представлено на рисунке 1.

[2] Составлено авторами

Рис.1: Полное дерево ветвления маршрутов [3]



Заключение

Таким образом, в данной статье показан способ решения проблемы коммивояжёра с использованием таблицы данных и усовершенствованного метода ветвей и границ, который доказал эффективность своего применения при сравнительно небольшом количестве данных. При решении конкретной проблемы доставки товаров в примере используются определенные адреса, расстояние между которыми точно известно.

В условиях конкурентного рынка важно рационализировать каждый бизнес-сегмент, используя математические методы, такие как метод ветвей и границ. Рационализация путем

[3] Составлено авторами

расчета оптимальных маршрутов доставки очень проста в использовании и значительно снижает затраты на ведение бизнеса.

Проблема передвижного коммивояжера может широко использоваться во многих экономических системах. Одними из важнейших моментов могут быть организация производства и определение наиболее оптимальной последовательности операций и задач. Метод ветвей и границ подходит для работы с компьютерными приложениями и считается одним из перспективных методов для дальнейшего изучения, например, путем увеличения скорости расчета [11] или возможности распараллеливания [12].

Литература

1. Little, J.D.C.; Murty, K.G.; Sweeney, D.W.; Karel, C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operat. Res. 1963, № 11, с. 972–989.

2. Гудман, С.; Хидетниеми, С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

3. Сигал, И.Х.; Иванова, А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – 2-е изд. испр и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. –304 с.

4. Ульянов, М.В. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 304 с.

5. Montero, A.; Mendez-Diaz, I.; Jose Miranda-Bront, J. An integer programming approach for the time-dependent traveling salesman problem with time windows // Computers & Operations Research. 2017. Том: 88. Стр.: 280-289

6. Yang, Zh.; Xiao, M.-Q.; Ge, Ya-W.; с соавторами.A double-loop hybrid algorithm for the traveling salesman problem with arbitrary neighbourhoods // European Journal of Operational Research. 2018. Том: 265, Выпуск: 1. Стр.: 65-80.

7. Lo, K.-M.; Yi, W.-Y.; Wong, P.-K.; с соавторами.A Genetic Algorithm with New Local Operators for Multiple Traveling Salesman Problems // International Journal of Computational Intelligence Systems. 2018. Том: 11, Выпуск: 1. Стр.: 692-705.

8. Новиков, Ф.А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 3-е изд. Стандарт третьего поколения. – СПб.: Питер, 2017. – 496 с.

9. Ромм, Я.Е.; Назарьянц, Е.Г. Полиномиальная сложность параллельной формы метода ветвей и границ решения задачи коммивояжёра // Известия ЮФУ. 2015. №4. С. 46-50.

10. Овезгельдыев, А.О.; Морозов, А.В. Развитие метода ветвей и границ в задаче поиска оптимального кольцевого маршрута // Кибернетика и системный анализ. - 2013. - Т. 49, № 5. - С. 112-119.

11. Vasilchikov, V.V. On Optimization and Parallelization of the Little Algorithm for Solving the Travelling Salesman Problem // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. Том: 51, Выпуск: 7. Стр.: 551-557.
12. Burkhovetskiy, V.V.; Steinberg, B.Y. Parallelizing an exact algorithm for the traveling salesman problem / Конференция: 6th Annual International Young Scientists Conference on HPC and Computational Science (YSC) Местоположение: Kotka, FINLAND публ.: NOV 01-03, 2017. Серия книг: Procedia Computer Science Том: 119 Стр.: 97-102.

THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM SOLUTION USING THE BRANCHES AND BORDERS METHOD

Elizaveta Kopylova

Student of Samara State University of Economics

Samara, Russia

Daria Nikolayeva

Student of Samara State University of Economics

Samara, Russia

Elena V. Buntova

Candidate of pedagogical science, Assistant Professor in

Samara State University of Economics

Samara, Russia

Abstract. The article discusses the possibility of reducing the products' transportation logistics costs by finding the most profitable way to move. Since the courier is necessary returning to the departure point, this necessitates the traveling salesman problem solution. Various algorithm parts have been reviewed and improved by a number of researchers. However, the full modern version of the problem's solution has not been presented before. This article presents an improved method's algorithm and its application. A step-by-step algorithm for the traveling salesman problem is described using the branch and boundary method. The algorithm includes six steps: table creation, table reduction, the lower boundary calculation, branching, estimates calculation, the branch tree construction.

Further, the authors made the calculation according to the described algorithm of possible courier's ways of the company's products delivery to the actual addresses in 10 Russian cities. The optimal route and its maximum duration are determined, while the logistics costs are significantly reduced. The obtained results showed that the search for solutions is carried out qualitatively and efficiently by using the branch and boundary method, while the method itself is not labor-intensive.

Keywords: traveling salesman problem; graph theory; branch and boundary method; Hamilton path; Hamilton cycle.

JEL Code: C 02; C 65.

References

1. Little, J.D.C.; Murder, K.G.; Sweeney, D.W.; Karel, C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operat. Res. 1963, No. 11, pp. 972-989.

2. Goodman, S.; Hedetniemi, S. Introduction to the design and analysis of algorithms. - M.: Mir, 1981. - 368 p.

3. Sigal, I.H.; Ivanova, A.P. Introduction to applied discrete programming: models and computational algorithms. - 2nd ed. – M.: FIZMATLIT, 2007. -304 p.

4. Ulyanov, M.V. Resource-efficient computer algorithms. Development and analysis. – M.: FIZMATLIT, 2008. - 304 p.

5. Montero, A.; Mendez-Diaz, I.; Jose Miranda-Bront, J. An integer programming approach for the time-dependent traveling salesman problem with time windows // Computers & Operations Research. 2017. Volume: 88. P.: 280-289

6. Yang, Zh.; Xiao, M.-Q.; Ge, Ya-W.; at all A double-loop hybrid algorithm for the traveling salesman problem with arbitrary neighborhoods // European Journal of Operational Research. 2018. Volume: 265, Issue: 1. P.: 65-80.

7. Lo, K.-M.; Yi, W.-Y.; Wong, P.-K.; at all A Genetic Algorithm with New Local Operators for Multiple Traveling Salesman Problems // International Journal of Computational Intelligence Systems. 2018. Volume: 11, Issue: 1. P.: 692-705.

8. Novikov, F.A. Discrete mathematics: Textbook for universities. 3rd ed. The third generation standard. – SPb.: Peter, 2017. - 496 p.

9. Romm, J.E.; Nazarian, E.G. Polynomial complexity of parallel forms method the branch and bound solution to the traveling salesman problem // Izvestiya YuFU. 2015. No. 4. P. 46-50.

10. Ovezgeldyev, A.O.; Morozov, A.V. Development of the method of branches and boundaries in an optimal circular route // Cybernetics and system analysis. - 2013. - Vol. 49, № 5. - P. 112-119.

11. Vasilchikov, V.V. on Optimization and Parallelization of the Little Algorithm for Solving the Travelling Salesman Problem // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. Volume: 51, Issue: 7. P.: 551-557.

13. Burkhovetskiy, V.V.; Steinberg, B.Y. Parallelizing an exact algorithm for the traveling salesman problem / Conference: 6th Annual International Young Scientists Conference on HPC and Computational Science (YSC): Kotka, FINLAND, NOV 01-03, 2017. Book series: Procedia Computer Science. Volume: 119 P.: 97-102.

Contact

Elizaveta Kopylova
Samara State University of Economics
141, Sovetskaya Armiya str., Samara, Russia, 443063
kopylowa.elizaveta@yandex.ru

Daria Nikolayeva
Samara State University of Economics
141, Sovetskaya Armiya str., Samara, Russia, 443063
ms.dnik25@gmail.com

Elena V. Buntova
Samara State University of Economics
141, Sovetskaya Armiya str., Samara, Russia, 443063
lena-buntova1@yandex.ru